

Asignatura: Mecánica de Sólidos I

Unidad didáctica 4: Torsión en barras de sección circular

4.1 Deformaciones torsionantes de una barra circular

4.1.1 Deformaciones unitarias por cortante en la superficie exterior

5.1.2 Deformaciones unitarias por cortante dentro de la barra

4.1.3 Tubos circulares

4.2 Barras circulares de materiales linealmente elásticos

4.2.1 La fórmula de la torsión

4.2.2 Ángulo de torsión

4.2.3 Tubos circulares

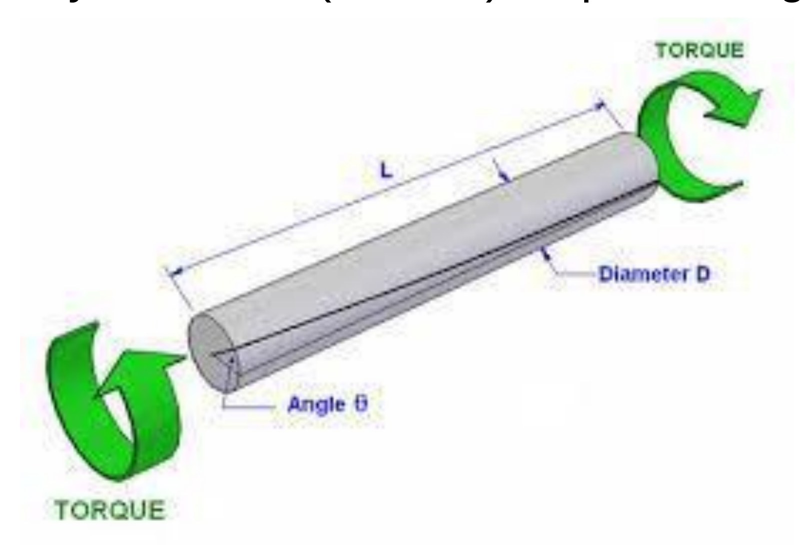
Presentado por: M. en C. Laura Yessenia Cabello Suárez

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería



Objetivo

Introducir al estudiante a la teoría general de la torsión sobre ejes sólidos y tubulares (huecos) de pared delgada.

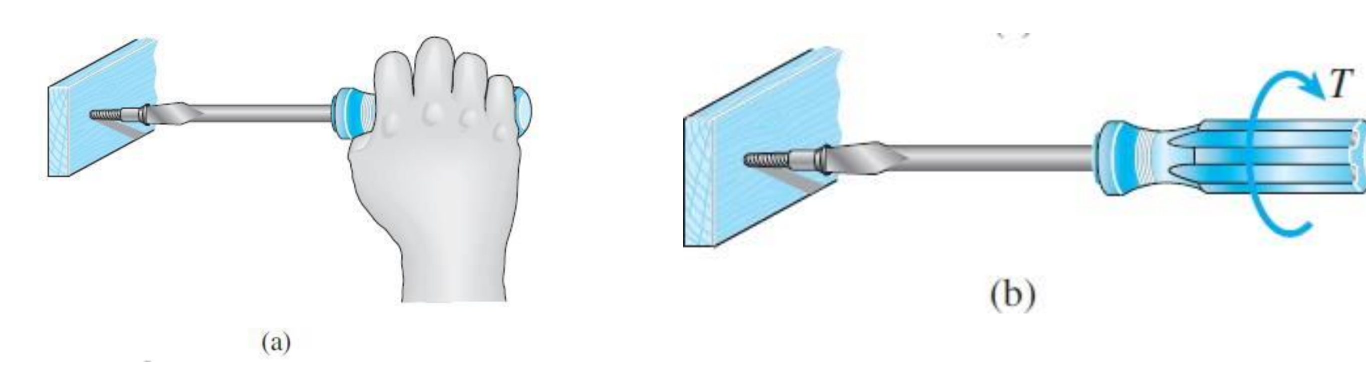


Gere, J. (2006). Mecánica de Materiales. Séptima edición. México, D.F. Thomson.

Beer, F. P., Johnston, E. R., DeWolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2010). Mecánica de materiales. Quinta Edición. México. Mc Graw Hill.

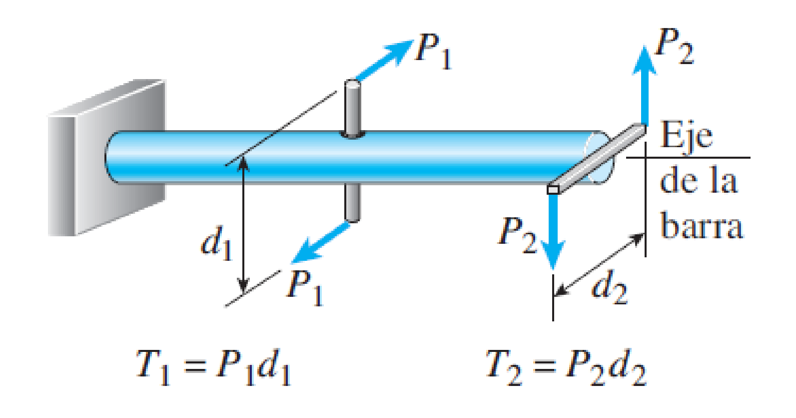
Hibbeler, R. (2007). Mecánica de Materiales. Sexta Edición. México. Pearson Educación.

Torsión se refiere al torcimiento de una barra recta al ser cargada por momentos (o pares de torsión) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra.



(a) (b)

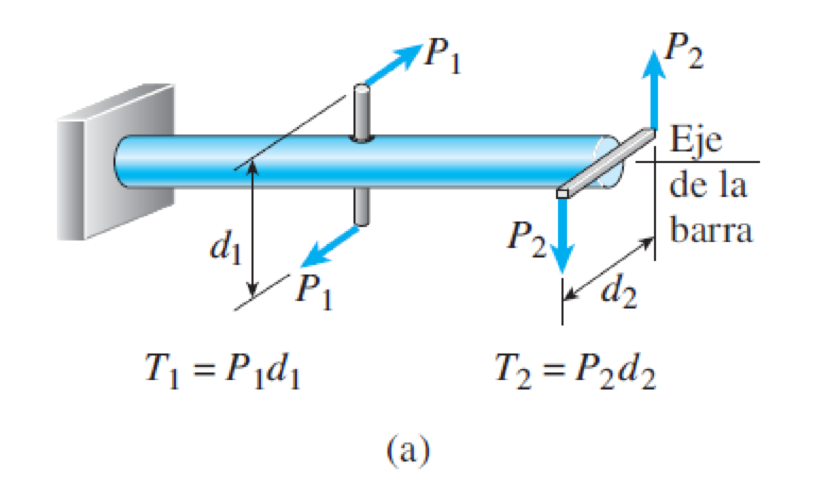
Un caso idealizado de carga torsional se presenta en la siguiente figura:



(a)

Cada par de fuerzas, forma un **par de torsión (momento)** que tiende a torcer la barra con respecto a su eje longitudinal.

El **momento o par de torsión** es igual al producto de una de las fuerzas y la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas.



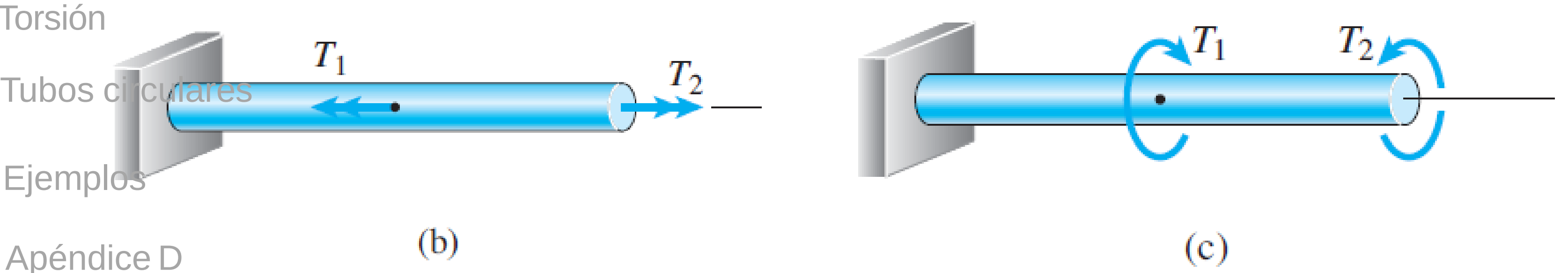
(a)

$$T_1 = P_1 d_1$$

$$T_2 = P_2 d_2$$

Pares de torsión o momentos de torsión

Las unidades para el momento son (lb-ft) y (lb-in) sistema inglés y (N·m) para el SI.

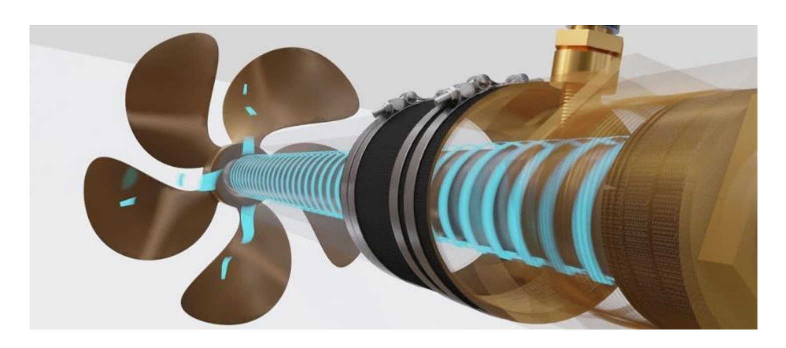


(b)

(c)

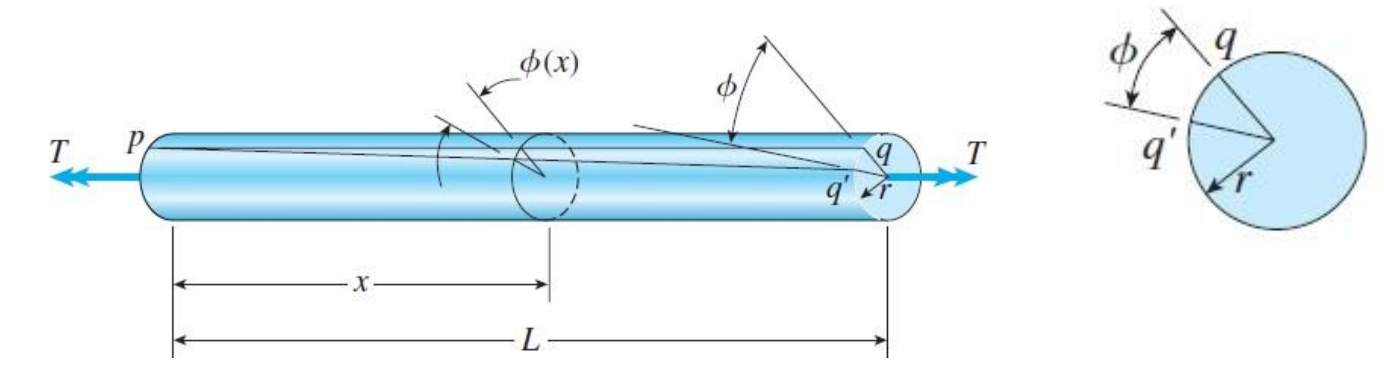
Los elementos cilíndricos que se someten a pares de torsión y transmiten potencia mediante rotación se llaman **ejes**.


Eje de un automóvil


Eje de la hélice de un barco

La mayoría de los ejes tienen secciones transversales circulares que pueden ser **sólidas o tubulares (huecas).**

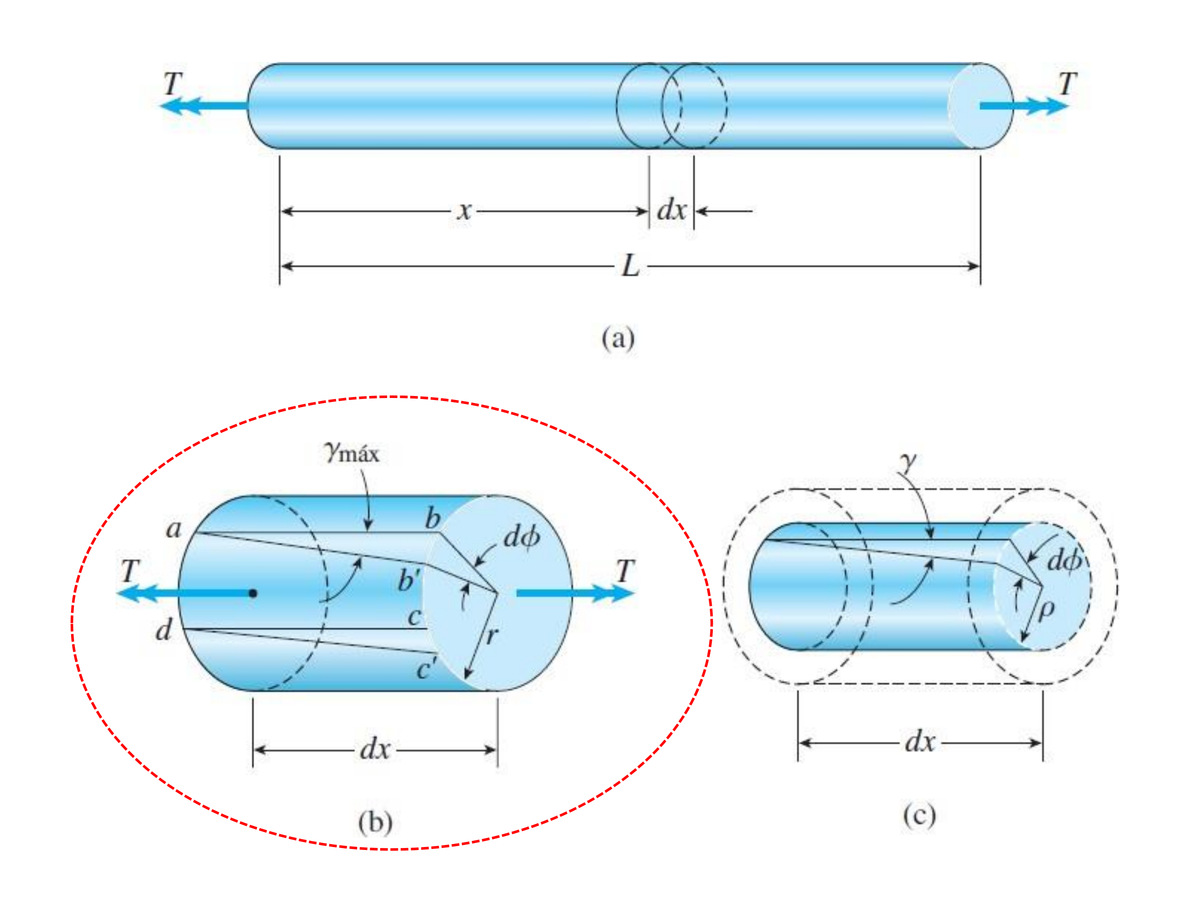
Al considerar una barra prismática con sección transversal circular torcida por pares de torsión T que actúan en sus extremos, decimos que la barra está en **torsión pura**.



Todas las secciones transversales permanecen planas y circulares y todos los radios permanecen rectos. Además, **si el ángulo de rotación entre un extremo de la barra y el otro es pequeño, no cambiarán la longitud de la barra ni sus radios.**

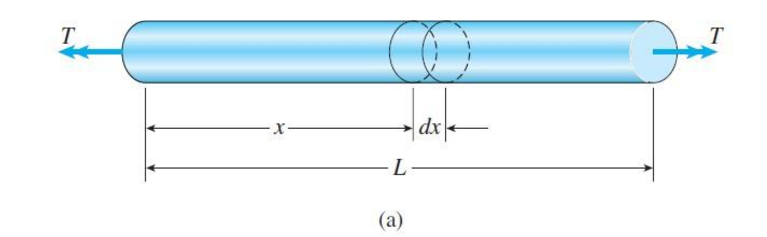
El extremo izquierdo está fijo. Luego, ante la acción del **par de torsión T**, el extremo derecho girará (con respecto al extremo izquierdo) un ángulo pequeño ϕ (**ángulo de torsión**). Debido a esta rotación, la línea recta longitudinal pq en la superficie de la barra se convertirá en la curva helicoidal pq´.

Deformación unitaria cortante al exterior

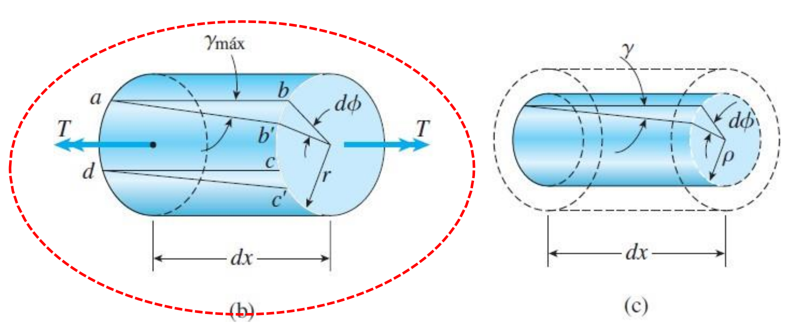


En su superficie exterior identificamos un **elemento pequeño** *abcd*, con lados *ab* y *cd* que al inicio son paralelos al eje longitudinal. Durante el torcimiento de la barra, las longitudes de los lados del elemento, que ahora son *ab*'*c*'*d*, no cambian durante esta rotación pequeña.

Deformación unitaria cortante al exterior



(a)



(b) (c)

Sin embargo, los ángulos en las esquinas del elemento ya no son iguales a 90°. Por tanto, el elemento está en un estado de **cortante puro**, lo cual significa que el elemento está sometido a **deformaciones por cortante**.

$$\gamma_{max} = \frac{\mathrm{d}x}{L} = \frac{bb'}{ab} = \frac{rd\phi}{dx}$$

Donde:

$\gamma_{máx}$= Deformación por cortante en la superficie externa de la barra. radianes

Si ***r*** **denota el radio de la barra (bb´= rdϕ),** podemos reescribir la ecuación como:

$$\gamma_{\max} = r\,\frac{d\phi}{dx}$$

Esta ecuación relaciona la **deformación unitaria cortante** en la superficie exterior de la barra **con el ángulo de torsión**.

Deformación unitaria cortante al exterior

Denotando dϕ/dx con el símbolo θ, la denominamos como **razón de torsión** o **ángulo de torsión por unidad de longitud**.

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \qquad (4.1)$$

$$\gamma_{\max} = r\frac{d\phi}{dx} = r\theta \qquad (4.2)$$

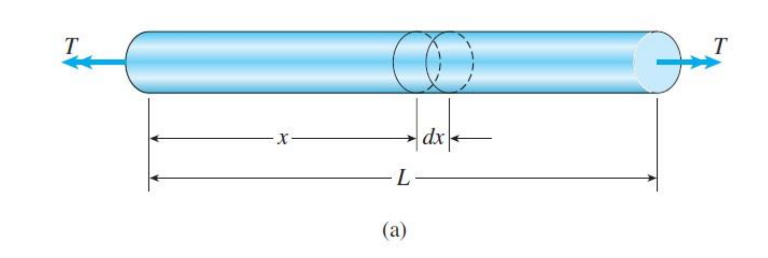
Torsión no es constante, es decir, varía con la distancia x a lo largo del eje de la barra.

En el caso de **torsión pura**:

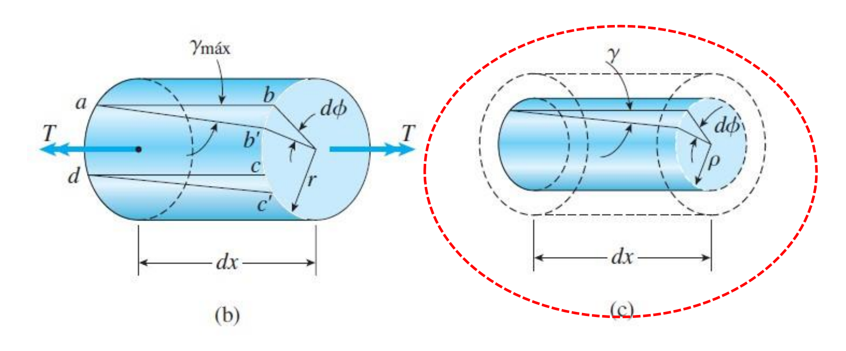
$$\theta = \frac{\phi}{L} \qquad (4.3)$$

$$\gamma_{\max} = r\theta = r\frac{\phi}{L} \qquad (4.4)$$

Deformación unitaria cortante al interior



(a)



(b) (c)

Los **elementos interiores** también están **en cortante puro** con las deformaciones unitarias por cortante correspondientes dadas por la ecuación (4.2).

$$\gamma_{\max} = r\frac{d\phi}{dx} = r\theta$$

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{max} \quad (4.5)$$

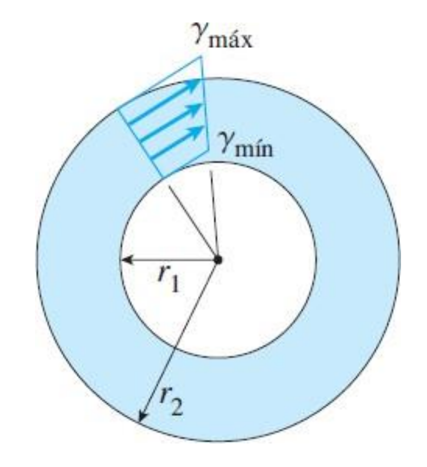
Deformaciones unitarias cortantes varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro

γ= 0 en el centro

γ_{max}= en la superficie exterior

Tubos circulares

Las ecuaciones para las deformaciones unitarias cortantes (4.2 a 4.5) se aplican a **tubos circulares**, así como a **barras circulares sólidas**.



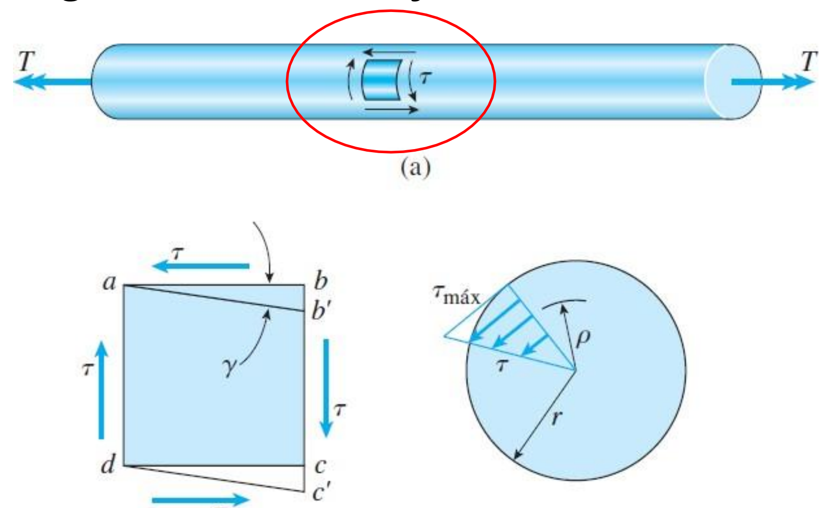
Tubos circulares:

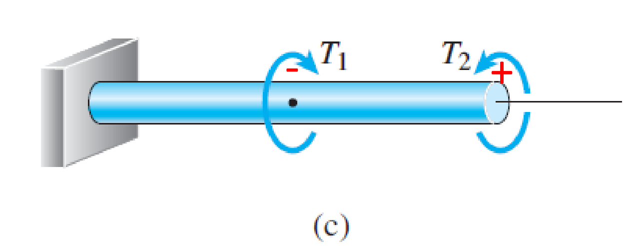
$$\gamma_{\max} = r_2 \frac{\phi}{L} \tag{4.6a}$$

$$\gamma_{min} = \frac{r_1}{r_2}\gamma_{max} = \frac{r\phi}{L} \tag{4.6b}$$

Las ecuaciones son válidas para cualquier material, ya sea que se comporte **elástica o inelásticamente, lineal o no linealmente.** Sin embargo, las ecuaciones están limitadas a barras con ángulos de torsión pequeños y deformaciones unitarias mínimas.

Al haber obtenido las **deformaciones unitarias por cortante** en una barra circular en torsión, podemos ***determinar las direcciones y magnitudes de los esfuerzos cortantes correspondientes***.





Las magnitudes de los **esfuerzos cortantes** se pueden determinar a partir de las deformaciones unitarias mediante la relación esfuerzo-deformación unitaria para el material de la barra. Si el material es linealmente elástico, podemos utilizar la **ley de Hooke en cortante**.

Barras circulares elásticas

ley de Hooke en cortante

$$\tau = G\gamma \qquad (4.7)$$

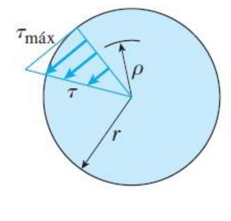
donde:
G= módulo de elasticidad en cortante
γ= deformación unitaria por cortante en radianes.

Al combinar esta ecuación con las ecuaciones para las **deformaciones unitarias por cortante** tenemos:

$$\tau_{max} = Gr\theta \qquad (4.8a)$$

$$\tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{\max} \qquad (4.8b)$$

donde:
$\tau_{máx}$ = esfuerzo cortante en la superficie exterior de la barra (radio r).
τ= esfuerzo cortante en un punto interior (radio ρ)
Θ= razón de torsión. Radianes por unidad de longitud

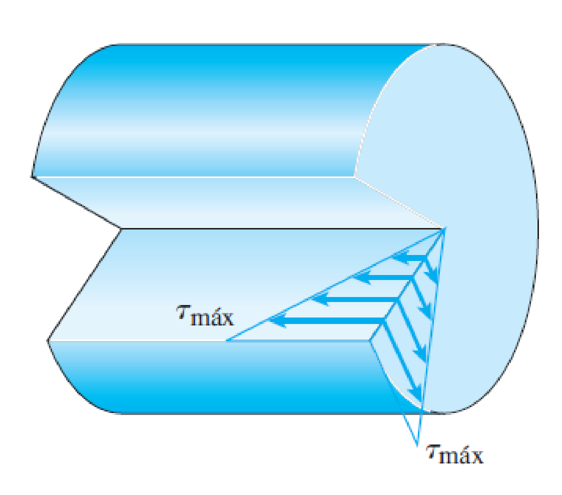


(c)

Las ecuaciones 4.8a y 4.8b muestran que los esfuerzos cortantes varían linealmente con la distancia desde el centro de la barra y es una consecuencia de la Ley de Hooke.

Barras circulares elásticas

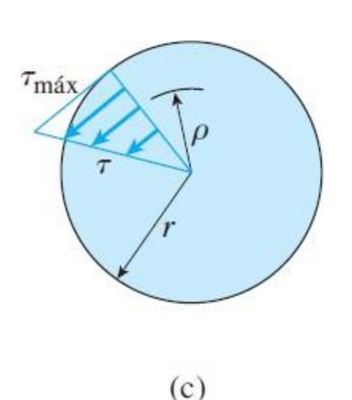
Los esfuerzos cortantes que actúan sobre un plano transversal van acompañados de esfuerzos cortantes con la misma magnitud que las que actúan sobre planos longitudinales.



Si el material de la barra es **más débil** en cortante en *planos longitudinales que en planos transversales*, la primera grieta debida a la torsión aparecerá en la superficie en la **dirección longitudinal**.

Fórmula de Torsión

Ahora hay que determinar la relación entre los **esfuerzos cortantes y el par de torsión T.**

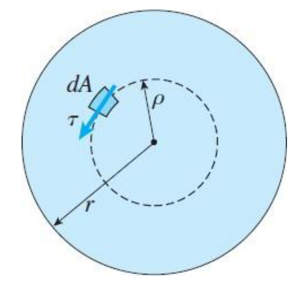


(c)

La distribución de los esfuerzos cortantes que actúan sobre una sección transversal se representa en la figura de la izquierda.

Debido a que dichos esfuerzos actúan continuamente alrededor de la sección transversal, tienen una resultante en la forma de un momento, que es igual al par de torsión T que actúa sobre la barra .

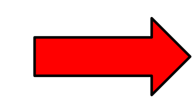
Si consideramos un elemento de área dA ubicado a una distancia radial ρ desde el eje de la barra. La fuerza cortante que actúa sobre este elemento es igual a τdA.



Fórmula de la Torsión

El momento de esta fuerza con respecto al eje de la barra es igual a la fuerza multiplicada por su distancia desde el centro, o τρdA. Sustituyendo "τ" en la ecuación (4.8b):

$$\tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{\max} \quad (4.8b)$$



$$dM = \tau\rho dA = \frac{\tau_{\max}}{r}\rho^2 dA$$

El momento resultante (igual al par de torsión T) es la suma a lo largo de toda el área de la sección transversal de todos los momentos elementales:

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{max}}{r}\int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{max}}{r} I_p \quad (4.9)$$

En donde I_P es el **momento polar de inercia** de la sección transversal circular.

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad (4.10)$$

Fórmula de la Torsión

Para un círculo con radio r y diámetro d, el momento polar de inercia es:

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (4.11)$$

donde:
I_p= momento polar de inercia. Unidad de longitud a la cuarta potencia (m^4, in^4, ft^4)

Es posible obtener una expresión para el esfuerzo cortante máximo reacomodando la ecuación (4.9), como sigue:

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_P} \quad (4.12)$$

Fórmula de la Torsión: barras circulares sólidas y tubos

donde:
τ= esfuerzo cortante (Pa, psi)
T= par torsión (N-m ó lb-ft, lb-in)
r= radio (m, ft, in)
I_p= momento polar de Inercia (m^4,in^4, ft^4)

Sustituyendo $r = d/2$ e $I_P = \pi d^4/32$ en la fórmula de la torsión, obtenemos la ecuación siguiente para el **esfuerzo cortante máximo**:

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (4.13)$$

Fórmula sólo aplica para barras circulares sólidas

Fórmula de la Torsión

El esfuerzo cortante a una distancia ρ desde el centro de la barra (interior) es:

$$\tau = \frac{\rho}{r}\tau_{\max} = \frac{T\rho}{I_P} \quad (4.14)$$

→ **Fórmula generalizada de la torsión Interior de la barra**

Ángulo de torsión

Se puede relacionar el ángulo de torsión de una barra linealmente elástico con el par de torsión aplicado T:

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \quad (4.15)$$

donde:
θ = razón de torsión (radianes por unidad de longitud)
GI_p= rigidez torsional de la barra

Para una barra en **torsión pura**, el ángulo de torsión ϕ total es igual a la razón de torsión multiplicada por la longitud de la barra (es decir, ϕ = θL) y se mide en radianes.

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \quad (4.16)$$

donde:
ϕ = ángulo de torsión total (radianes)

Ángulo de Torsión

La cantidad GI_P/L, llamada ***rigidez torsional de la barra***, es el par de torsión necesario para producir una rotación de un ángulo unitario.

$$k_T = \frac{GI_P}{L}$$

→ **Análoga a la rigidez axial k= EA/L**

La ***flexibilidad torsional*** es el recíproco de la rigidez, y se define como el ángulo de rotación producido por un par de torsión unitario.

$$f_T = \frac{L}{GI_P}$$

→ **Análoga a la flexibilidad axial f= L/EA**

Al realizar una **prueba de torsión** en una barra circular podemos medir el **ángulo de torsión ϕ** producido por un par de torsión conocido *T*. Luego se puede calcular el valor de *G* con la ecuación (4.16).

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \quad (4.16)$$

Tubos Circulares

Los *tubos circulares* resisten con más eficiencia las cargas torsionales que las *barras sólidas*.

Porque, los esfuerzos cortantes en una *barra circular sólida* son máximos en el borde exterior de la sección transversal y cero en el centro.

También, en un tubo hueco común la mayor parte del material está cerca del borde exterior de la sección transversal, donde los esfuerzos cortantes y los brazos de momento son mayores. **Por tanto, si en una aplicación es importante reducir peso y ahorrar material, se aconseja emplear un tubo circular.**



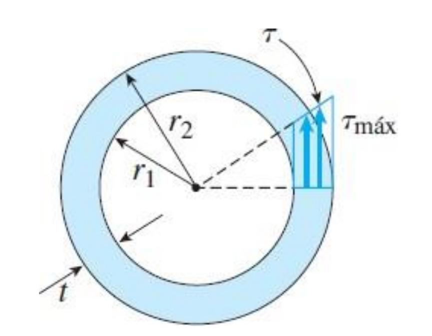
Eje de la hélice de un barco



Eje de generadores

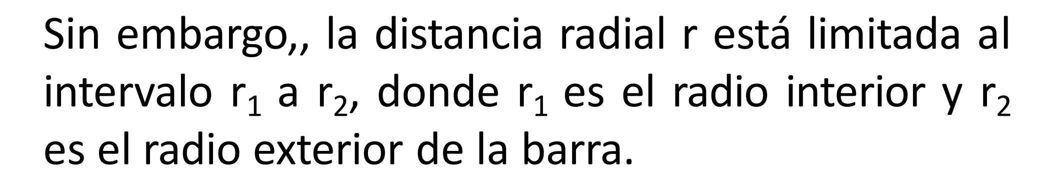
Tubos Circulares

El análisis de la torsión de un *tubo circular* es casi idéntico al de una *barra sólida*. Se pueden emplear las mismas expresiones básicas para los esfuerzos cortantes.



Sin embargo,, la distancia radial r está limitada al intervalo r_1 a r_2, donde r_1 es el radio interior y r_2 es el radio exterior de la barra.

La relación entre el par de torsión T y el esfuerzo máximo está dada por la ecuación (4.9), pero con limites en la integral $\rho = r_1$ a r_2.
El momento polar de inercia del área de la sección transversal de un tubo es:



$$I_P = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right) \quad (4.17)$$

Pero también se pueden escribir como:

$$I_P = \frac{\pi r t}{2}\left(4r^2 + t^2\right) = \frac{\pi d t}{4}\left(d^2 + t^2\right)$$

donde:
r = radio promedio del tubo. $(r_1+r_2)/2$
d= diámetro promedio. $(d_1+d_2)/2$
t= espesor de la pared. r_2-r_1

Tubos Circulares

Si el **tubo es relativamente delgado**, de tal modo que el espesor de la pared t es pequeño en comparación con el radio promedio r, podemos ignorar los términos de t^2 en la ecuación 4.17:

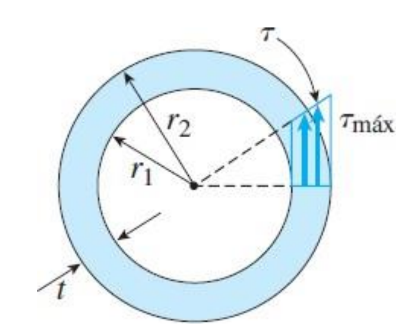
$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \qquad (4.18)$$

Fórmulas aproximadas para el momento polar de inercia

La ecuación de torsión 4.12 puede ser aplicada para un tubo circular, siempre y cuando el momento polar de inercia se evalué con la ecuación 4.17.

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_P} \qquad (4.12)$$

Fórmula de la Torsión: barras circulares sólidas y tubos

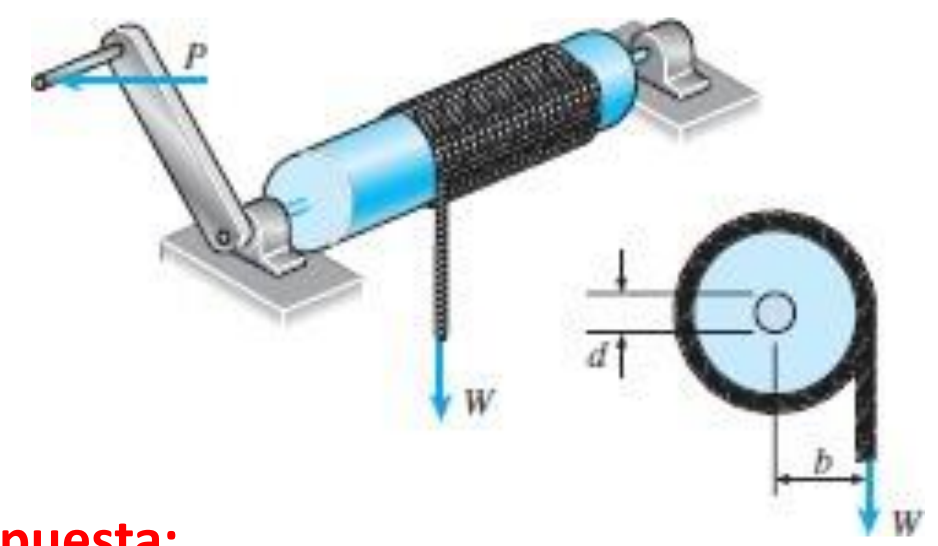


Tubo hueco, el material se utiliza de manera mas eficiente que en una barra sólida. Se debe de estar seguros que el espesor t es suficientemente grande para evitar el arrugamiento o pandeo de la pared del tubo.

Ejemplo 1

Un minero utiliza un malacate de operación manual para izar un cubo de mineral en el tiro de su mina. El eje del malacate es una barra de acero con diámetro d = 0.625 in. Además, la distancia desde el centro del eje hasta el centro de la cuerda de izado es b = 4.0 in.

Si el peso del cubo cargado es W = 100 lb, ¿cual es el esfuerzo cortante máximo en el eje debido a la torsión?

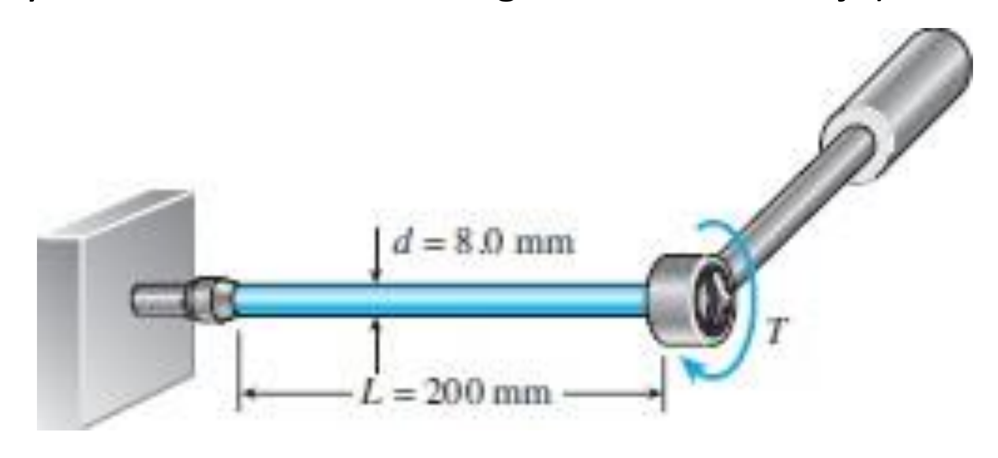


Respuesta:

τ_{max}**=8, 344.30 lb/in^2**

Ejemplo 2

El eje de acero de una llave de cubo tiene un diámetro de 8.0 mm y una longitud de 200 mm. Si el esfuerzo cortante permisible en la barra es 60 MPa, ¿cuál es el par de torsión máximo permisible $\tau_{máx}$ que se puede ejercer con la llave?, ¿Que ángulo ϕ (en grados) girará el eje ante la acción del par de torsión máximo? (Suponga G = 78 GPa y no tome en cuenta ninguna flexión del eje).



Respuesta:

a) T_{max}=6.03 N-m

b) ϕ= 0.038 rad

Ejemplo 3

Objetivo

Introducción

Deformación Torsionante

Deformación unitaria cortante al exterior

Deformación Unitaria Cortante al interior

Tubos circulares

Barras circulares elásticas

Fórmula de Torsión

Ángulo de Torsión

Tubos circulares

Ejemplos

Apéndice D

Un eje hueco de acero empleado en una barrena de construcción tiene un diámetro exterior d_2 = 6.0 in y un diámetro interior d_1 = 4.5 in. El acero tiene un módulo de elasticidad G = 11.0×10^6 psi.



Para un par de torsión aplicado de 150 kips-in, determine las cantidades siguientes:



(a) El esfuerzo cortante τ_2 en la superficie exterior del eje.

(b) El esfuerzo cortante τ_1 en la superficie interior y

(c) La razón de torsión θ (grados por unidad de longitud).

Respuesta:

a) τ_2=5,173.60 lb/in^2

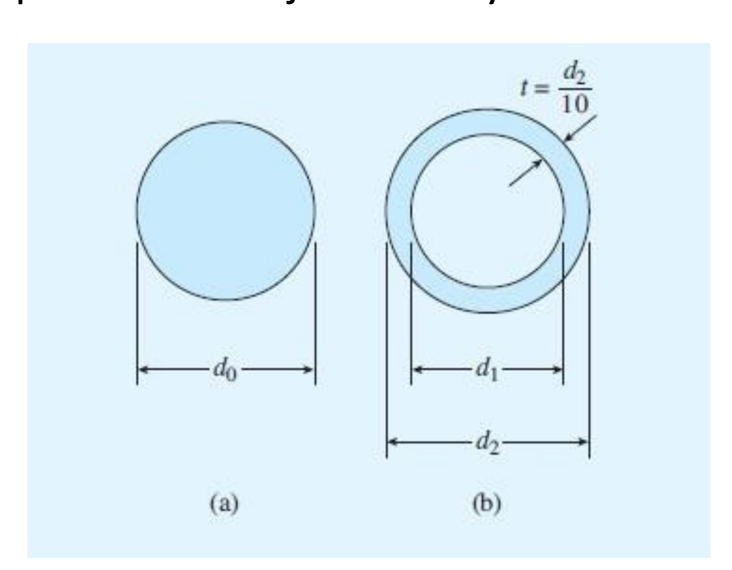
b) τ_1=3,880.20 lb/in^2

c) θ= 1.57x10^{-4} rad/in

Ejemplo 4

Se va a fabricar un eje de acero como una barra circular sólida o bien como un tubo circular (figura). Se requiere que el eje transmita un par de torsión de 1200 N·m sin que se exceda un esfuerzo cortante permisible de 40 MPa ni una razón de torsión permisible de 0.75°/m. (El módulo de elasticidad en cortante del acero es 78 GPa).

(a) Determine el diámetro necesario d_0 del eje sólido.
(b)Determine el diámetro exterior necesario d_2 del eje hueco si su espesor t se especifica igual a un décimo del diámetro exterior.
(c) Determine la razón de los diámetros (es decir, la razón d2/d0) y la razón de los pesos de los ejes hueco y sólido.



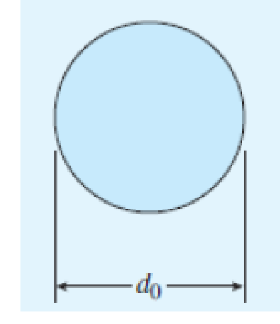
Solución ejemplo 4; Torsión

Datos:

Barra sólida y tubo
T= 1200 N-m
$\tau_{permisible}$= 40 MPa= 40x106 N/m2
$\theta_{permisible}$= 0.75˚/m = 0.0131 rad/m
G= 78 GPa= 78x10^{9} N/m^{2}

Solución:

a) d_o= ?, de la barra sólida



$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (4.13)$$

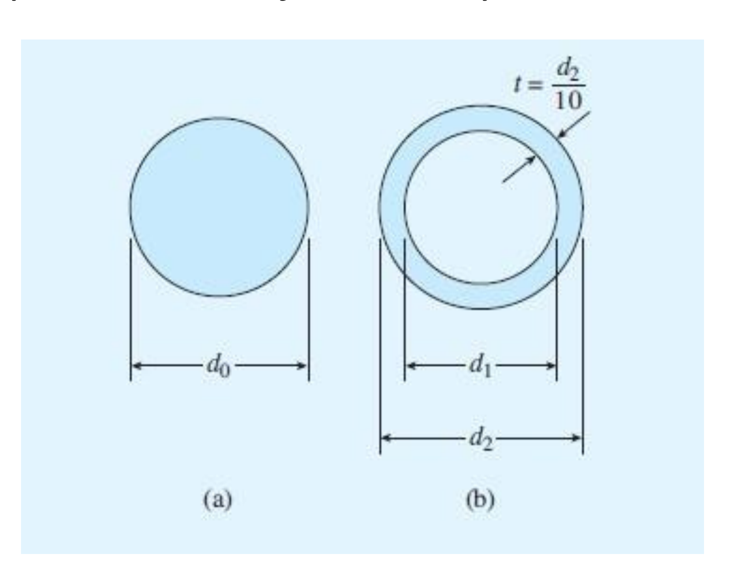
$d = d_o$ ∴ De la ecuación 4.13, se despeja a d; $d_o = \sqrt[3]{\frac{16T}{\tau_{max}\pi}}$

$$\therefore \quad d_o = \sqrt[3]{\frac{16(1200\ N - m)}{(40x10^6\frac{N}{m^2})\pi}} = 0.0535\ m = 53.5\ mm$$

Ejemplo 4

Se va a fabricar un eje de acero como una barra circular sólida o bien como un tubo circular (figura). Se requiere que el eje transmita un par de torsión de 1200 N·m sin que se exceda un esfuerzo cortante permisible de 40 MPa ni una razón de torsión permisible de 0.75°/m. (El módulo de elasticidad en cortante del acero es 78 GPa).

(a) Determine el diámetro necesario d_0 del eje sólido.
(b)Determine el diámetro exterior necesario d_2 del eje hueco si su espesor t se especifica igual a un décimo del diámetro exterior.
(c) Determine la razón de los diámetros (es decir, la razón d2/d0) y la razón de los pesos de los ejes hueco y sólido.



Solución ejemplo 4; Torsión

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \quad (4.15)$$

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} \quad (4.11)$$

$$\theta = \frac{T}{G(\frac{\pi d^4}{32})}$$ Despejando a d se tiene; $$d = \sqrt[4]{\frac{32T}{G\pi\theta}}$$

$$\therefore \quad d = \sqrt[4]{\frac{32(12000\ N-m)}{(78x10^9 \frac{N}{m^2})(\pi)(0.0131)}} = 0.0581m = 58.1\ mm$$

Al comparar los diámetros de 53.5 mm y 58.8 mm, tomamos el valor mayor para que cumpla con las condiciones de cortante permisible y la razón de torsión permisible.

$$\therefore \quad 58.1\ mm$$

Solución ejemplo 4; Torsión

b) d₂= ?, del eje hueco

$$t = \frac{1}{10} d_2 = 0.1 d_2$$

$$d_1 = d_2 - 2t = d_2 - 2(0.1 d_2)$$

$$d_1 = d_2 - 0.2 d_2$$

$$\therefore \quad \boxed{d_1 = 0.8\, d_2}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_P} \quad (4.12) \qquad I_P = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right) \quad (4.17)$$

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - (0.8\, d_2)^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - 0.4096\, d_2{}^4\right)$$

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(0.5904\, d_2{}^4\right) = \boxed{0.05796\, d_2{}^4}$$

Solución ejemplo 4; Torsión

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{I_P} \quad (4.12) \quad \longrightarrow \quad \tau_{max} = \frac{T\left(\frac{d_2}{2}\right)}{0.05796\, d_2{}^4}$$

De esta ecuación, se despeja a d_2:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{T}{0.11592\tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{1200\ N{-}m}{0.11592(\frac{40x10^6 N}{m^2})}}$$

$$\therefore \quad d_2 = 0.0637\ m = \boxed{63.73\ mm}$$

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \quad (4.15)$$

$$\theta = \frac{T}{G(0.05796\, d_2{}^4)}$$; De esta ecuación, se despeja a d_2: $$d_2 = \sqrt[4]{\frac{T}{G(0.05796)\theta}}$$

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{12000\ N-m}{(78x10^9 \frac{N}{m^2})(0.05796)(0.0131)}} = 0.0671m = \boxed{67.10\ mm}$$

Solución ejemplo 4; Torsión

Al comparar los diámetros de 63.73 mm y 67.10 mm, tomamos el valor mayor para que cumpla con las condiciones de cortante permisible y la razón de torsión permisible.

$$\therefore \quad d_2 = 67.10\ mm$$

$$d_1 = 0.8\ d_2$$

$$\therefore$$

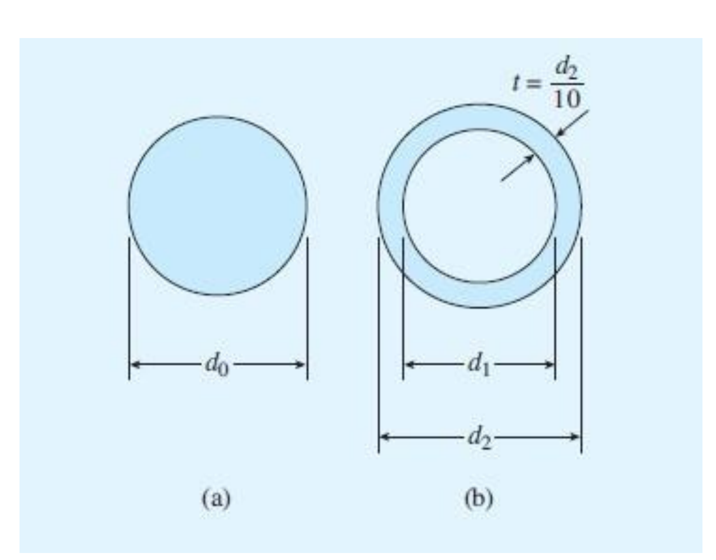
$$d_1 = 0.8\ (67.10\ mm)$$

$$d_1 = 53.67\ mm$$

Ejemplo 4

Se va a fabricar un eje de acero como una barra circular sólida o bien como un tubo circular (figura). Se requiere que el eje transmita un par de torsión de 1200 N·m sin que se exceda un esfuerzo cortante permisible de 40 MPa ni una razón de torsión permisible de 0.75°/m. (El módulo de elasticidad en cortante del acero es 78 GPa).

(a) Determine el diámetro necesario d_0 del eje sólido.
(b)Determine el diámetro exterior necesario d_2 del eje hueco si su espesor t se especifica igual a un décimo del diámetro exterior.
(c) Determine la razón de los diámetros (es decir, la razón d2/d0) y la razón de los pesos de los ejes hueco y sólido.



Solución ejemplo 4; Torsión

c) $\frac{d_2}{d_o} = ?$ y $\frac{Peso_{hueco}}{Peso_{sólido}} = ?$

$$\frac{d_2}{d_o} = \frac{67.10}{58.81} = \boxed{1.14}$$

$$\frac{Peso_{hueco}}{Peso_{sólido}} = \frac{Area_{hueco}}{Area_{sólido}} \quad ;$$

$$Area_{hueco} = \frac{\pi({d_2}^2 - {d_1}^2)}{4}$$

$$Area_{hueco} = \frac{\pi(67.10\ mm^2 - 53.67\ mm^2)}{4}$$

$$Area_{hueco} = \boxed{1272.82\ mm^2}$$

Solución ejemplo 4; Torsión

$$Area_{sólido} = \frac{\pi({d_o}^2)}{4}$$

$$Area_{sólido} = \frac{\pi(58.81\ mm^2)}{4}$$

$$Area_{sólido} = 2716.39\ mm^2$$

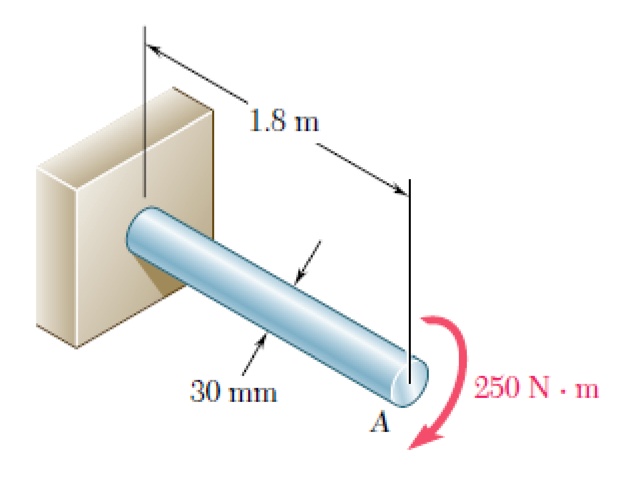
$$\frac{Peso_{hueco}}{Peso_{sólido}} = \frac{Area_{hueco}}{Area_{sólido}} = \frac{1272.82\ mm^2}{2716.39\ mm^2} = 0.47$$

El tubo (hueco) es 47% más ligero que la barra sólida.

;

Ejemplo 5

a) Para el eje sólido de acero mostrado en la Figura (G= 77 GPa), determine el ángulo de giro en A. (b) Resuelva la parte a, suponiendo que el eje de acero es hueco con un diámetro exterior de 30 mm y un diámetro interior de 20 mm.



Respuesta:

a) ϕ=0.073 rad

b) ϕ=0.092 rad

Apéndice D. Propiedades de áreas planas

1 **Rectángulo** (origen de los ejes en el centroide)

$$A = bh \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

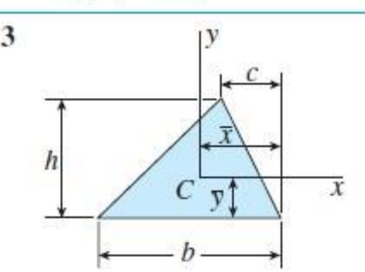
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

2 **Rectángulo** (origen de los ejes en una esquina)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad I_P = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

$$I_{BB} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$$

3 **Triángulo** (origen de los ejes en el centroide)



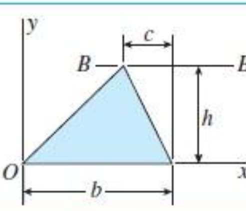
$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b + c}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \qquad I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$$

Apéndice D. Propiedades de áreas planas

4

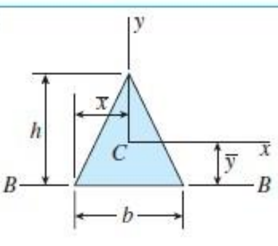


Triángulo (origen de los ejes en el vértice)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

5



Triángulo isósceles (origen de los ejes en el centroide)

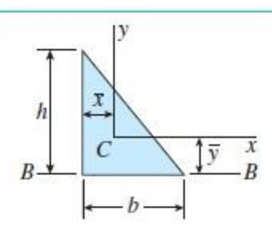
$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{hb^3}{48} \qquad I_{xy} = 0$$

$$I_P = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{12}$$

(*Nota:* para un triángulo equilátero, $h = \sqrt{3}\, b/2$.)

6



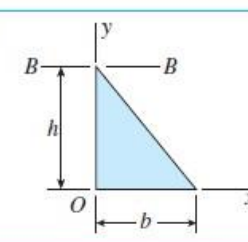
Triángulo rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{hb^3}{36} \qquad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{12}$$

7

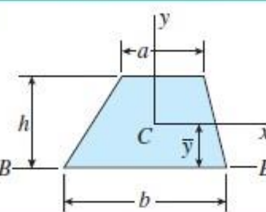


Triángulo rectángulo (origen de los ejes en el vértice)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

8



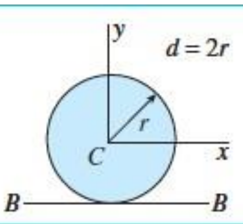
Trapecio (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{h(a + b)}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h(2a + b)}{3(a + b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)} \qquad I_{BB} = \frac{h^3(3a + b)}{12}$$

Apéndice D. Propiedades de áreas planas

9

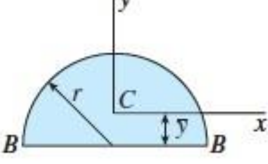


Círculo (origen de los ejes en el centro)

$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ $\quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$

$I_{xy} = 0$ $\quad I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$ $\quad I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$

10

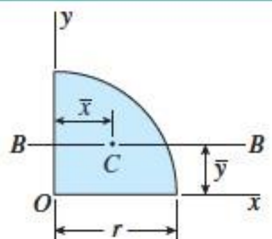


Semicírculo (origen de los ejes en el centroide)

$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $\quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4$ $\quad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $\quad I_{xy} = 0$ $\quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$

11

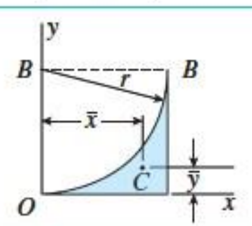


Cuarto de círculo (origen de los ejes en el centro del círculo)

$A = \frac{\pi r^2}{4}$ $\quad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\quad I_{xy} = \frac{r^4}{8}$ $\quad I_{BB} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \approx 0.05488r^4$

12

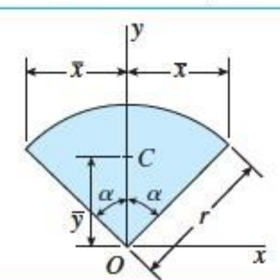


Tímpano cuadrante (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$A = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2$ $\quad \bar{x} = \frac{2r}{3(4-\pi)} \approx 0.7766r$ $\quad \bar{y} = \frac{(10 - 3\pi)r}{3(4-\pi)} \approx 0.2234r$

$I_x = \left(1 - \frac{5\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.01825r^4$ $\quad I_y = I_{BB} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.1370r^4$

13



Sector circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

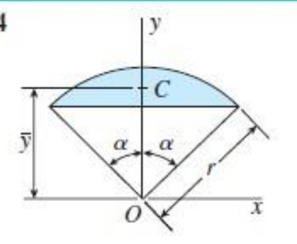
α = ángulo en radianess $\quad (\alpha \leq \pi/2)$

$A = \alpha r^2$ $\quad \bar{x} = r \operatorname{sen} \alpha$ $\quad \bar{y} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$

$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$ $\quad I_y = \frac{r^4}{4}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$ $\quad I_{xy} = 0$ $\quad I_P = \frac{\alpha r^4}{2}$

Apéndice D. Propiedades de áreas planas

14



Segmento circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

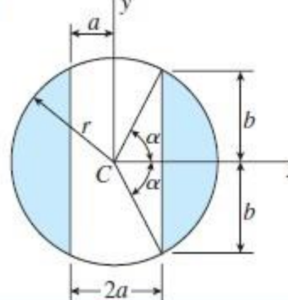
α = ángulo en radianes $\quad (\alpha \leq \pi/2)$

$$A = r^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{3}\left(\frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha) \qquad I_{xy} = 0$$

$$I_y = \frac{r^4}{12}(3\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha)$$

15



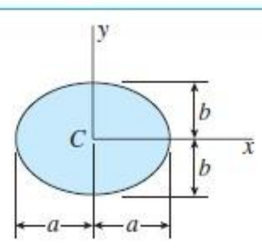
Círculo con núcleo removido (origen de los ejes en el centro del círculo)

α = ángulo en radianes $\quad (\alpha \leq \pi/2)$

$$\alpha = \arccos\frac{a}{r} \qquad b = \sqrt{r^2 - a^2} \qquad A = 2r^2\left(\alpha - \frac{ab}{r^2}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{6}\left(3\alpha - \frac{3ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_y = \frac{r^4}{2}\left(\alpha - \frac{ab}{r^2} + \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_{xy} = 0$$

16



Elipse (origen de los ejes en el centroide)

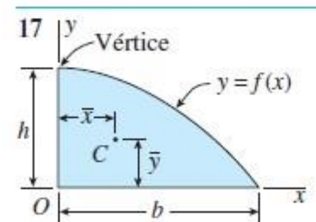
$$A = \pi ab \qquad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\pi ab}{4}(b^2 + a^2)$$

$$\text{Circunferencia} \approx \pi[1.5(a + b) - \sqrt{ab}\,] \qquad (a/3 \leq b \leq a)$$

$$\approx 4.17b^2/a + 4a \qquad (0 \leq b \leq a/3)$$

17



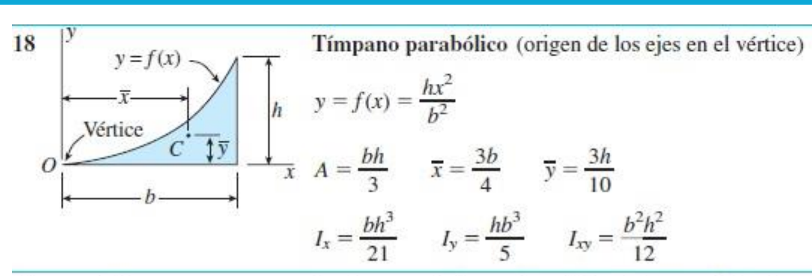
Semisegmento parabólico (origen de los ejes en la esquina)

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

$$I_x = \frac{16bh^3}{105} \qquad I_y = \frac{2hb^3}{15} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

Apéndice D. Propiedades de áreas planas



18 **Tímpano parabólico** (origen de los ejes en el vértice)

$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$

$A = \frac{bh}{3}$ $\quad \bar{x} = \frac{3b}{4}$ $\quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$

$I_x = \frac{bh^3}{21}$ $\quad I_y = \frac{hb^3}{5}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$

19 **Semisegmento de grado *n*-ésimo** (origen de los ejes en la esquina)

$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^n}{b^n}\right) \qquad (n > 0)$

$A = bh\left(\frac{n}{n+1}\right)$ $\quad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)}$ $\quad \bar{y} = \frac{hn}{2n+1}$

$I_x = \frac{2bh^3n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)}$ $\quad I_y = \frac{hb^3n}{3(n+3)}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2n^2}{4(n+1)(n+2)}$

20 **Tímpano de grado *n*-ésimo** (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$y = f(x) = \frac{hx^n}{b^n} \qquad (n > 0)$

$A = \frac{bh}{n+1}$ $\quad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{n+2}$ $\quad \bar{y} = \frac{h(n+1)}{2(2n+1)}$

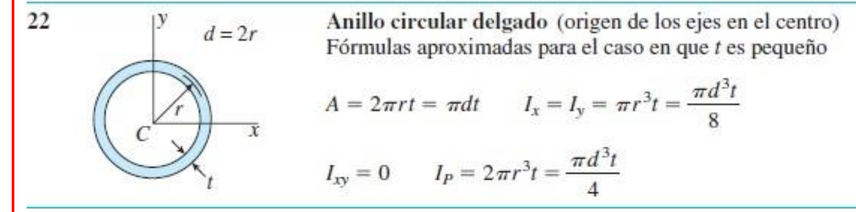
$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)}$ $\quad I_y = \frac{hb^3}{n+3}$ $\quad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4(n+1)}$

21 **Onda senoidal** (origen de los ejes en el centroide)

$A = \frac{4bh}{\pi}$ $\quad \bar{y} = \frac{\pi h}{8}$

$I_x = \left(\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{16}\right)bh^3 \approx 0.08659bh^3$ $\quad I_y = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}\right)hb^3 \approx 0.2412hb^3$

$I_{xy} = 0$ $\quad I_{BB} = \frac{8bh^3}{9\pi}$



22 **Anillo circular delgado** (origen de los ejes en el centro)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

$d = 2r$

$A = 2\pi rt = \pi dt$ $\quad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$

$I_{xy} = 0$ $\quad I_P = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$

23 **Arco circular delgado** (origen de los ejes en el centro del círculo)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

β = ángulo en radianes (*Note:* para un arco semicircular, $\beta = \pi/2$.)

$$A = 2\beta r t \qquad \bar{y} = \frac{r \operatorname{sen} \beta}{\beta}$$

$$I_x = r^3 t(\beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta) \qquad I_y = r^3 t(\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta)$$

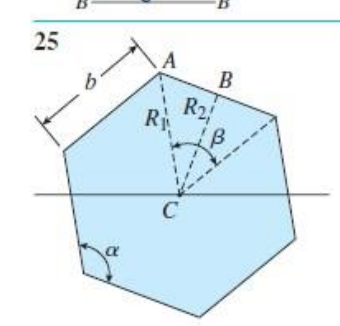
$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = r^3 t\left(\frac{2\beta + \operatorname{sen} 2\beta}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{\beta}\right)$$

24 **Rectángulo angosto** (origen de los ejes en el centroide)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

$$A = bt$$

$$I_x = \frac{tb^3}{12}\operatorname{sen}^2 \beta \qquad I_y = \frac{tb^3}{12}\cos^2 \beta \qquad I_{BB} = \frac{tb^3}{3}\operatorname{sen}^2 \beta$$

25 **Polígono regular con n lados** (origen de los ejes en el centroide)



C = centroide (en el centro del polígono)

n = número de lados ($n \geq 3$) $\quad b$ = longitud de un lado

β = ángulo central para un lado $\quad \alpha$ = longitud de un lado

$$\beta = \frac{360°}{n} \qquad \alpha = \left(\frac{n-2}{n}\right)180° \qquad \alpha + \beta = 180°$$

R_1 = radio del círculo circunscrito (línea CA) $\quad R_2$ = radio del círculo circunscrito (línea CB)

$$R_1 = \frac{b}{2}\csc\frac{\beta}{2} \qquad R_2 = \frac{b}{2}\cot\frac{\beta}{2} \qquad A = \frac{nb^2}{4}\cot\frac{\beta}{2}$$

I_c = momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por C (el centroide es un punto principal y cada eje que pasa por C es un eje principal)

$$I_c = \frac{nb^4}{192}\left(\cot\frac{\beta}{2}\right)\left(3\cot^2\frac{\beta}{2} + 1\right) \qquad I_P = 2I_c$$

POR SU ATENCIÓN,
¡MUCHAS GRACIAS!